Tema 1

1	2	3	4
B	B	B-	B-

Calif.
9,25

4 hojas P19

Apellido y Nombre: Manzotti Mauro

Turno: Noche

Nro. Libreta:

Carrera: Cs de la Computación

Segundo Recuperatorio Primer Parcial - 18/07/2024 - 1er. Cuatrimestre 2024

Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II(C)

---

1. Sea $f(x,y) = \sqrt{y + (x-1)^2}$.

   (a) Determinar y graficar el Dominio de f.

   (b) Sea C la curva de nivel 3 de f. Dar una parametrización de C.

   (c) Hallar la recta normal a la curva C en el punto (3,5).

---

2. Analizar la existencia de los siguientes limites

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\,\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)(y-2)}{x^2+(y-2)^2}.$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+\operatorname{sen}(x))\;xy}{2x^2+y^2}.$

---

3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Analizar la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$ para $n=2$, $n=3$ y $n=4$.

---

4. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = xz + y\operatorname{sen}(xz) - 2xy^2$.

   (a) Probar que la ecuación $F(x,y,z) = 8$ define de manera implícita una función diferenciable $z = f(x,y)$ tal que $f(-1,2) = 0$.

   (b) Si $g(x,y) = x\,e^{f(x,y)} - x^3y^2$, determinar la direccion de máximo crecimiento de $g(x,y)$ en el punto $(-1,2)$.

Justifique sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

EJERCICIO 1

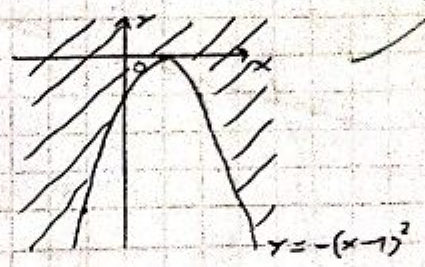
$f(x,y)=\sqrt{y+(x-1)^2}$

a) El dominio de f en $\mathbb{R}$ son todos los (x,y) tq $y+(x-1)^2 \geq 0$, ya que en $\mathbb{R}$ no puedo sacar la raíz cuadrada de números negativos.

$y+(x-1)^2 \geq 0 \rightarrow y \geq -(x-1)^2$

$Dom(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq -(x-1)^2\}$

Dom(f):



b) La curva de nivel 3 de f es igual a:

$C: 3=\sqrt{y+(x-1)^2}$

$\rightarrow 9 = y+(x-1)^2$

$\rightarrow y=-(x-1)^2+9$ la cual ~~es~~ es una parábola, la cual puedo parametrizar como $\sigma(t)=(t,-(t-1)^2+9)$

¿ Dom σ ?

c) Para hallar la recta normal a C en (3,5) primero busco un t_0 tq $\sigma(t_0)=(3,5)$

$\begin{cases} t=3 \longrightarrow t_0=3 \\ -(t-1)^2+9=5 \longrightarrow -(3-1)^2+9=5 \rightarrow 5=5 \end{cases}$

Ahora busco la derivada de $\sigma(t)$:

$\sigma'(t)=(1, \frac{d}{dt}-t^2+2t-1+9)=(1,-2t+2)$

Y sé que $\sigma'(t_0)$ me da el vector director de la recta tangente a $\sigma(t)$ en el punto $\sigma(t_0)$.

recta tg recta normal

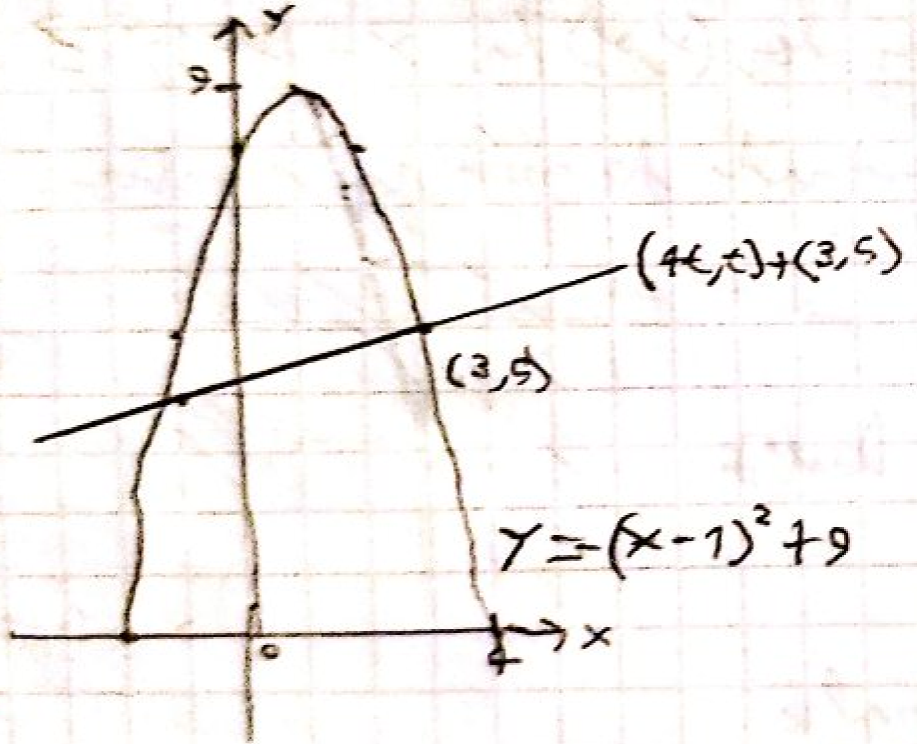
$\sigma'(t_0)=(1,-4)$. Para el vector director de la recta normal debo encontrar un vector perpendicular a ese.

$v\perp(1,-4) \leftrightarrow v\cdot(1,-4)=0 \rightarrow a\cdot 1+b\cdot -4=0 \rightarrow a-4b=0$ Elijo a=4, b=1

$v=(a,b)$ $\rightarrow V=(4,1)$

Ahora v es el vector director de la recta normal a C en (3,5), y la ecuación de esa recta es:

$$RN(t) = t\cdot(4,1)+(3,5) = (4t,t)+(3,5) = (4t+3,t+5)$$



Mauro Marcotti

EJERCICIO 2

$$f(x) = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)\cdot(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$$

Primero me aproximo por curvas para ~~?~~ suponer un valor del límite o ver si no existe.

$x=0$: $\lim_{y\to 2} \frac{0\cdot\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)\cdot(y-2)}{0+(y-2)^2} = \lim_{y\to 2} \frac{0}{(y-2)^2} \to 0$ Por lo que el lím vale 0 o no existe.

$y=x+2$: $\lim_{x\to 0} \frac{sen^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2x} \to 0$

Intento demostrar que el lim $\to 0$ vía sandwich:

$$\cancel{\left|\frac{sen^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)\cdot(y-2)}{x^2+(y-2)^2} - 0\right| = \frac{\left|sen^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)\cdot(y-2)\right|}{x^2+(y-2)^2}}$$

Antes, para hacerlo más fácil, reduzco el límite hacia (0,0):

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y-2 \end{cases}$$ y ahora $\lim_{(x',y')\to(0,0)} \left|\frac{sen^3\left(\frac{\pi}{4}x'\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot y'}{x'^2+y'^2}\right|$ Como $x^2+y^2 = \|(x,y)\|^2$:

con $y\neq 2$

$$= \frac{\left|sen^3\left(\frac{\pi}{4}x'\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot y'\right|}{\|(x',y')\|^2} = \frac{\left|sen^3\left(\frac{\pi}{4}x'\right)\right|\cdot\left|\cos\left(\frac{1}{y'}\right)\right|\cdot|y'|}{\|(x',y')\|^2}$$

Sé que $|sen(x)| \leq |x|$ por lo que $\left|sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right| \leq |x|$ ($\frac{\pi}{4} \leq 1$ por lo que se achica más rápido)

y también entonces $\left|sen^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right| \leq |x^3|$.

$$\leq \frac{|x'^3|\cdot\left|\cos\left(\frac{1}{y'}\right)\right|\cdot|y'|}{\|(x',y')\|^2}$$ Como $|\cos(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\leq \frac{|x'^3|\cdot|y'|}{\|(x',y')\|^2}$$ y como $|x^n| \leq \|(x,y)\|^n$, $|y^n| \leq \|(x,y)\|^n$: $\leq \frac{\|(x',y')\|^4}{\|(x',y')\|^2} = \|(x',y')\|^2 \xrightarrow{(x',y')\to(0,0)} 0$

$= \|(x,y-2)\|^2$

Llamo $g(x,y) = \|(x,y-2)\|$ y, por sandwich:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,2)} g(x,y)$$

$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) \leq 0$ por lo que $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen^3\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{1}{y-2}\right)\cdot(y-2)}{x^2+(y-2)^2} = 0$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1+\operatorname{sen}(x))\cdot xy}{2x^2+y^2}$ Primero me aproximo por curvas:

$x=0$: $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} \to 0$ ✓ $\quad y=x$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+\operatorname{sen}(x))\cdot x^2}{3x^2} = \dfrac{(1+\operatorname{sen}(x))}{3} \xrightarrow{x\to 0} \dfrac{1}{3}$

Como obtuve dos resultados diferentes acercándome al límite por curvas $(0 \neq \frac{1}{3})$, el límite de $\dfrac{(1+\operatorname{sen}(x))\cdot xy}{2x^2+y^2}$ en $(0,0)$ no existe.

EJERCICIO 3

3) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^n}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$ con $n \in \mathbb{N}$

Una forma de analizar diferenciabilidad (en un punto P) es comprobar que:

- Es continua en ese punto
- Existen $f_x(P)$ y $f_y(P)$
- La ecuación de diferenciabilidad da 0.

Entonces es diferenciable.

$P=(0,0)$

$n=2$: $f_2(x,y)$ es continua en $(0,0)$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}=0$ ✓ $f(0,0)$

Mediante curvas: $x=0$: $\lim\limits_{y\to0} \dfrac{0}{y^2}\to 0$ $\quad y=x$: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

Como obtuve dos límites diferentes, el límite no existe, por lo tanto, $f_2(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ y por lo tanto no es diferenciable en $(0,0)$.

$n=3$: $f_3(x,y)$ es continua en $(0,0)$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}=0$

Curvas, $x=0$: $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{y^2}\to 0$

Demuestro vía sandwich: $\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{\|(x,y)\|^3}{2\|(x^2+y^2)\|^2} = \dfrac{\|(x,y)\|}{2}$ $\quad$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\|(x,y)\|}{2}=0$

y como $\dfrac{\|(x,y)\|}{2} \geq \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}=0 \to$ es continua en $(0,0)$.

Ahora calculo las derivadas parciales de f_3 en $(0,0)$:

$f_{3x}(0,0)= \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^3}{h^3}=1$

$f_{3y}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0,h)}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h^3}\to 0$

Por lo que $f_{3x}=1$ y $f_{3y}=0$.

Ahora uso la ecuación de diferenciabilidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-(f(0,0)+f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}-x}{\|(x,y)\|}=0$$ ¿? que ver

Curvas: $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{\frac{0}{y^2}-0}{y^2} = \frac{0}{y^4} \to 0$

~~Demuestro vía sandwich~~:

$y=x$: $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2x^2}-x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\frac{1}{2}x-x}{\sqrt{2}x^2}$ — Sólo si $x>0$

$\sqrt{2}|x|$ $= \frac{-\frac{1}{2}x}{\sqrt{2}x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Como obtuve dos valores distintos el límite no existe y f_3 no es dif. en $(0,0)$.

$n=4$. f_4 es continua en $(0,0)$ si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}=0$

Curvas: $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} \to 0$

Demuestro vía sandwich: $\left|\frac{x^4}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^4}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\|^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

$\therefore$ f_4 es cont. en $(0,0)$.

Calculo $f_{4x}(0,0)$ y $f_{4y}(0,0)$:

$$f_{4x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_4(h,0)-f_4(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^3} = \lim_{h\to 0} h \to 0$$

$$f_{4y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_4(0,h)-f_4(0,0)}{h} = \lim \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} \to 0$$

$\therefore$ $f_x(0,0)=0$ y $f_y(0,0)=0$

Aplico la ecuación de diff:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_4(x,y)-(f_4(0,0)+f_{4x}(0,0)x+f_{4y}(0,0)y)}{\|(x,y)\|}=0 \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_4(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$$

$$\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{x^2+y^2}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4}{\|(x,y)\|^2}}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{\|(x,y)\|^3}$$

Curvas: $x=0$: $\lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} \to 0$

Vía sandwich: $\left|\frac{x^4}{\|(x,y)\|^3}\right| = \frac{|x^4|}{\|(x,y)\|^3} \leq \frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3} = \|(x,y)\| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$. $0 \leq \lim \leq 0 \to \lim = 0$

Como la ec. de dif. se cumple, f_4 es dif. en $(0,0)$

Entonces $f(x,y)$ es dif. en $(0,0)$ para $n=4$, y no es dif. para $n=2$ y $n=3$.

EJERCICIO 4

$F(x,y,z) = xz + y\,\text{sen}(xz) - 2xy^2$ ~~$F(x,y,z)=8$~~

~~F_x Calculo sus derivadas parciales:~~

~~$F(x,y,z)=8 \rightarrow g(x,y)$~~ ~~$F(x,y,z)=8$~~

~~$z = f(x,y)$~~

a) Calculo sus derivadas parciales:

$F_x(x,y,z) = z + yz\cos(xz) - 2y^2$

$F_y(x,y,z) = \text{sen}(xz) - 4xy$

$F_z(x,y,z) = x + yx\,\overset{\cos}{\cancel{\text{sen}}}(xz)$

Como $z = f(x,y)$ y $f(-1,2)=0$
$\rightarrow x=-1,\ y=2,\ z=0$

Evalúo en el punto que resolví de $f(-1,2)$:

$F_x(-1,2,0) = -8 \qquad F_y(-1,2,0) = 8 \qquad F_z(-1,2,0) = -3$

¿vale?

Como $F(-1,2,0) = 8$ (una constante), $F_z(-1,2,0) \neq 0$, y F es por lo menos C^1 (está compuesto por polinomios y funciones trigonométricas diferenciables cuyas derivadas son continuas), el Teorema de la Función Implícita dice que existe $z = f(x,y)$ función tq $f(-1,2)=0$ y $F(x,y,f(x,y)) = 8$.

b) $g(x,y) = xe^{f(x,y)} - x^3y^2$, la dirección de máximo crecimiento de $g(x,y)$ en $(-1,2)$ es igual a $\nabla g(-1,2)$.

Para calcular las derivadas de g necesito saber las de f antes.

Por TFI: $f_x(x,y) = -\dfrac{F_x(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))} \qquad f_y(x,y) = -\dfrac{F_y(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}$

$f_x(-1,2) = \frac{-8}{-3} = -\frac{8}{3}$

$f_y(-1,2) = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$

$\frac{d}{dx}e^{f(x,y)} = e^{f(x,y)} \cdot \frac{d}{dx}f(x,y)$

Luego: $g_x = e^{f(x,y)} + e^{f(x,y)} \cdot f_x(x,y) - 3x^2y^2$ No

falta x

$g_y = 3 \cdot (e^{f(x,y)} \cdot f_y(x,y)) - 2x^3y$

¿Hipotesis regla de la cadena?

Evalúo en $(-1,2)$:

$g_x(-1,2) = e^{f(-1,2)} + e^{f(-1,2)} \cdot f_x(-1,2) - 12 = e^0 + e^0 \cdot -\frac{8}{3} - 12 = -\frac{41}{3}$

$g_y(-1,2) = 3 \cdot (e^{f(-1,2)} \cdot f_y(-1,2)) + 4 = 3 \cdot e^0 \cdot \frac{6}{3} + 4 = 12$

Arrastras errores

$$\nabla g(x,y) = \left(g_x(x,y), g_y(x,y)\right)$$

$$\nabla g(-1,2) = \left(-\frac{41}{3}, 12\right)$$

Por lo que la dirección de máximo crecimiento de $g(x,y)$ en el punto $(-1,2)$ es $\left(-\frac{41}{3}, 12\right)$.